BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

CLASA a V-a

1. Se consideră mulțimea $A=\left\{2^x\cdot 3^y\cdot 7^z \;\middle|\; x,y,z\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Arătați că $2016\in A$.

b) Demonstrați că produsul oricăror două elemente din *A* aparține mulțimii *A*.

c) Dacă $B=\left\{2^x\cdot 3^y \;\middle|\; x,y\in\{1;2;3\}\right\}$ este o submulțime a lui *A*, demonstrați că cele 9 elemente distincte din *B* pot fi așezate într-o tablă pătrată 3×3 astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie (orizontală) și coloană (verticală) să fie același.

Soluție și barem:

OFICIU	**1p**
a) Avem $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7^1$; prin urmare $2016\in A$.	**1p**
b) Fie $a=2^x\cdot 3^y\cdot 7^z$ și $b=2^m\cdot 3^n\cdot 7^p$ cu $x,y,z,m,n,p\in\mathbb{N}$ două elemente din *A*. Atunci $a\cdot b=2^{x+m}\cdot 3^{y+n}\cdot 7^{z+p}\in A$	**2p**
c) Elementele lui *B* sunt: $2^1\cdot 3^1;2^1\cdot 3^2;2^1\cdot 3^3;2^2\cdot 3^1;2^2\cdot 3^2;2^2\cdot 3^3;2^3\cdot 3^1;2^3\cdot 3^2;2^3\cdot 3^3$.	**1p**
Produsul tuturor celor 9 elemente ale tablei este egal cu $2^{18}\cdot 3^{18}$ și prin urmare produsul elementelor de pe fiecare linie / coloană va fi egal cu $2^6\cdot 3^6$.	**3p**
O aranjare posibilă poate fi: $2^1\cdot 3^3$ | $2^2\cdot 3^1$ | $2^3\cdot 3^2$ $2^2\cdot 3^2$ | $2^3\cdot 3^3$ | $2^1\cdot 3^1$ $2^3\cdot 3^1$ | $2^1\cdot 3^2$ | $2^2\cdot 3^3$	**2p**

2. Determinați numerele de forma $\overline{abcd}$ care prin împărțire la produsul numerelor $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ dau restul egal cu 0.

Soluție și barem:

Fie $\overline{abcd}=k\cdot\overline{ab}\cdot\overline{cd}$, cu $k\in\mathbb{N}^*$.	**1p**
Obținem $\overline{ab}\cdot 100+\overline{cd}=k\cdot\overline{ab}\cdot\overline{cd}\Rightarrow\overline{ab}\,\vert\,\overline{cd}$, deci există $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\overline{cd}=m\cdot\overline{ab}$ și evident	**2p**

$m \le 9$.	
Înlocuind rezultă $\overline{ab} \cdot 100 + m \cdot \overline{ab} = k \cdot \overline{ab} \cdot m \cdot \overline{ab}$ sau $m \cdot \left(k \cdot \overline{ab} - 1 \right) = 100$ deci $m \mid 100$ și cum $m \le 9$ obținem $m \in \{1;2;4;5\}$.	**4p**
Verificând valorile lui *m* rezultă soluții doar pentru: $m = 2 \Rightarrow \overline{abcd} = 1734$; $m = 4 \Rightarrow \overline{abcd} = 1352$.	**2p**

3. Dacă $s(x)$ reprezintă suma cifrelor numărului natural *x*, determinați numărul elementelor mulțimii $M = \left\{ s(A+5) \mid s(A) = 2016 \right\}$.

<u>Soluție și barem</u>:

OFICIU	**1p**
Fie $A = \overline{c_1 c_2 \ldots c_n}$, unde c_i sunt cifre și $c_1 \neq 0$. Dacă $c_n \le 4$, atunci $A + 5 = \overline{c_1 c_2 \ldots c_{n-1} (c_n + 5)} \Rightarrow s(A+5) = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + 5 = 2016 + 5 = 2021$.	**2p**
Dacă $c_n \ge 5$, atunci pentru $c_{n-1} \neq 9$ rezultă $A + 5 = \overline{c_1 c_2 \ldots c_{n-2} (c_{n-1} + 1)(c_n + 5 - 10)}$, deci $s(A+5) = c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-2} + c_{n-1} + 1 + c_n + 5 - 10 = 2016 - 4 = 2012$	**2p**
Dacă $c_n \ge 5$ și dacă există $p \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le n-1$ astfel încât $c_p = c_{p+1} = \ldots = c_{n-1} = 9$, atunci $A + 5 = \overline{c_1 c_2 \ldots c_{p-2} \left(c_{p-1} + 1 \right) \underbrace{00\ldots0}_{n-p} (c_n + 5 - 10)} \Rightarrow s(A+5) = c_1 + c_2 + \ldots + c_{p-2} + c_{p-1} + c_n + 1 - 5 =$ $= s(A) - 9(n-p) - 4 = 2012 - 9(n-p)$	**3p**
Cum $1 \le n - p \le 223$, vom obține că $s(A)$ mai poate lua încă 223 de valori distincte. În concluzie $\text{card}\, M = 1 + 1 + 223 = 225$.	**2p**